

# Экспериментальная оценка эффективности распараллеливания RKDG-метода для решения двумерных газодинамических задач \*

В.Н. Корчагова<sup>1,2</sup>, С.М. Сауткина<sup>2</sup>, В.В. Лукин<sup>1,2,3</sup>, И.Н. Фуфаев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ИСП им. В.П. Иванникова РАН,

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана,

<sup>3</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Разработан прототип программного комплекса для решения двумерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках. Численная схема построена на основе разрывного метода Галеркина (RKDG), который позволяет обеспечить высокий порядок точности на компактном шаблоне аппроксимации. Предусмотрена возможность использования различных способов расчета численных потоков, поиска проблемных ячеек, технологий подавления нефизичных осцилляций. Прототип имеет параллельную архитектуру, основанную на технологии MPI. Экспериментально исследована эффективность распараллеливания, показаны результаты моделирования тестовых задач на сетках размером порядка  $10^6$  ячеек.

*Ключевые слова:* газовая динамика, разрывные решения, разрывный метод Галеркина, MPI.

## 1. Введение

Качество моделирования сверхзвуковых течений в значительной мере определяется качеством разрешения ударных волн и других гидрогазодинамических разрывов. Одним из способов решения таких задач является использование разрывного метода Галеркина, который также называют RKDG-методом (Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) [1]. Этот подход позволяет обеспечивать высокий порядок аппроксимации решения на ячейке при сохранении компактного шаблона. Кроме того, это дает возможность решать задачи в областях сложной формы на неструктурированных сетках.

Указанные достоинства RKDG-метода делают его перспективным инструментом решения соответствующего класса задач, однако его практическая реализация сопряжена с некоторыми трудностями. Высокий порядок аппроксимации приводит к возникновению нефизичных осцилляций решения вблизи разрывов; для их подавления используются различные функции — лимитеры [2,3]. Их применение может привести к снижению порядка точности схемы в области с гладким решением. Чтобы этого избежать, используются так называемые функции-индикаторы проблемных ячеек [4]. Необходимость поиска проблемных ячеек и монотонизации решения увеличивает вычислительную сложность алгоритма. Для случая одномерных течений разработаны весьма эффективные методы и алгоритмы [5], однако далеко не все они могут быть перенесены на двумерные и трехмерные задачи. Исследования в области построения эффективных индикаторов и лимитеров в многомерном случае активно ведутся в настоящее время различными исследователями [6,7], при этом «универсальных» решений, которые обеспечивали бы приемлемое качество разрешения разрывов при адекватных затратах вычислительных ресурсов и были бы применимы к широкому классу задач, на сегодня, по-видимому, не существует.

В данной работе рассмотрен прототип программного комплекса для моделирования двумерных течений идеального сжимаемого нетеплопроводного газа на неструктурирован-

---

\*Работа И.Н. Фуфаева и В.В. Лукина выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-20020.

ных сетках [8], в котором использован RKDG-метод с кусочно-линейным представлением решения, реализовано несколько численных потоков, два различных индикатора и несколько подходов к лимитированию решения.

Также дополнительным преимуществом RKDG-метода является возможность эффективного распараллеливания вычислений за счет использования явной схемы расчета в нестационарных задачах и благодаря компактности шаблона. В настоящей работе рассмотрена параллельная реализация прототипа программного комплекса с использованием технологии MPI и алгоритма ParMETIS для разбиения расчетной области на подобласти. Эффективность распараллеливания оценена на тестовых примерах. Показано, что реализованная численная схема обеспечивает практически линейное ускорение и обладает хорошей масштабируемостью.

## 2. Система уравнений газовой динамики

Нестационарная система уравнений газовой динамики, описывающая двумерные течения идеального сжимаемого нетеплопроводного газа в области  $\Omega$  на временном интервале  $[0, T]$ , имеет вид [9]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T, \\ \mathcal{F} &= [\mathbf{F}, \mathbf{G}], \\ \mathbf{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e + p)u]^T, \\ \mathbf{G} &= [\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vw, (e + p)v]^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор консервативных переменных;  $\mathcal{F}$  — тензор потоков;  $v, u, w$  — компоненты вектора скорости газа  $\mathbf{v}$ ;  $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$  — объемная плотность полной энергии;  $\rho$  — плотность газа;  $\varepsilon$  — массовая плотность внутренней энергии;  $p$  — давление. Система уравнений (1) должна быть дополнена уравнением состояния, в качестве которого рассмотрим уравнение состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (3)$$

где  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты.

Систему (1) можно записать в квазилинейной неконсервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}.$$

Эта система является гиперболической, поскольку все собственные числа матриц  $A$  и  $B$  действительны и существует полная система отвечающих им собственных векторов. Следовательно, матрицы могут быть диагонализированы и записаны в виде

$$\begin{aligned} A &= \Omega_R^A \Lambda^A \Omega_L^A, & \Omega_R^A &= (\Omega_L^A)^{-1}, \\ B &= \Omega_R^B \Lambda^B \Omega_L^B, & \Omega_R^B &= (\Omega_L^B)^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\Lambda^j = \text{diag}[\lambda_1^j, \dots, \lambda_5^j]$ ,  $j = A, B$ , — диагональные матрицы из собственных значений матриц  $A$  и  $B$ ;  $\Omega_R^j, \Omega_L^j$  — матрицы правых и левых собственных векторов соответственно.

Для системы уравнений (1) должны быть заданы начальные условия

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y), \quad (4)$$

а на границах расчетной области  $\partial\Omega$  необходимо поставить граничные условия, отвечающие физической постановке рассматриваемой задачи.

### 3. Численный метод

#### 3.1. Общая схема RKDG-метода

В области  $\Omega$  введем произвольную сетку, состоящую из  $n_{cells}$  ячеек; на каждой ячейке  $I_j$ ,  $j = \overline{1, n_{cells}}$ , определим пространство кусочно-непрерывных функций  $V_h^k = \{p: p|_j \in \mathbf{P}_k(I_j)\}$ , где  $\mathbf{P}_k(I_j)$  — пространство полиномов степени не выше  $k$  [10], в котором будем искать численное решение. Для рассматриваемого случая  $k = 1$  на каждой ячейке вводятся три базисные функции  $\{\phi_j^{(s)}(x, y)\}_{s=0}^2 \subset V_h^1$ , решение представляется их линейной комбинацией

$$\mathbf{U}_h(x, y, t) = \sum_{I_j} \sum_{s=0}^2 \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \phi_j^{(s)}(x, y),$$

коэффициенты которой (являющиеся функциями времени) находятся путем ортогонализации невязки каждого из уравнений (1), (4), тестовым функциям  $v(x, y) \in V_h^k$ , в качестве которых используются базисные функции  $\phi_j^{(s)}$ .

Поскольку в дальнейшем речь всегда будет идти о поиске приближенного решения, индекс  $h$  будем опускать. Окончательно система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения по базисным функциям принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{s=0}^2 \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \int_{I_j} \phi_j^{(s)} \phi_j^{(r)} dS \right) - \int_{I_j} \mathcal{F}_j \cdot \nabla \phi_j^{(r)} dS + \int_{\partial I_j} (\mathbf{n} \cdot \mathcal{F}_j) \phi_j^{(r)} dl = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_j^{(r)}(0) = \int_{I_j} \mathbf{U}_0(x, y) \phi_j^{(r)} dS, \quad k = 1, \dots, n, \quad r = 0, 1, 2,$$

где  $\partial I_j$  — граница ячейки  $I_j$ .

В качестве базисных выбраны функции вида

$$\phi_j^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{S_j}}, \quad \phi_j^{(1)} = \frac{2\sqrt{3}}{S_j}(x - x_j^c), \quad \phi_j^{(2)} = \frac{2\sqrt{3}}{S_j}(y - y_j^c),$$

где  $S_j$  — площадь ячейки,  $\{x_j^c, y_j^c\}$  — координаты ее центра. Линейные базисные функции ортогональны константе, а коэффициенты выбраны таким образом, что в случае квадратной ячейки матрица Грама оказывается единичной. Это свойство упрощает решение системы ОДУ (5).

Среди методов высокого порядка интегрирования системы (5) по времени необходимо использовать те, которые дают минимальную временную немонотонность численного решения [11]. К таковым относится, например, явный метод Рунге — Кутты второго порядка, обладающий свойством TVD [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}^n + \tau L_h(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^* + \frac{1}{2} \tau L_h(\mathbf{U}^*), \end{aligned}$$

где  $\tau$  — шаг по времени;  $\mathbf{U}^n$  и  $\mathbf{U}^{n+1}$  — приближенные решения на текущем и следующем временных слоях соответственно;  $L_h(\mathbf{U})$  — правая часть системы (5), записанной в нормальной форме Коши (разрешенной относительно производных).

#### 3.2. Численные потоки

На границах ячеек решение, носящее кусочно-полиномиальный характер, терпит разрыв, вследствие чего для вычисления потоков через ребра следует заменить в системе (5)

потоки  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , образующие тензор  $\mathcal{F}$ , на численные потоки [9]. Благодаря гиперболичности системы (1) расчет потоков может быть проведен в квазиодномерном приближении вдоль направления вектора нормали к соответствующему ребру:

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{F} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{U}),$$

где  $\mathbf{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  — единичный вектор нормали к ребру;  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta)$  — матрица поворота на угол  $\theta$  [9].

Численные потоки, как правило, строятся на основе точного или приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва, которое требует информации о собственных значениях локальной характеристической матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \theta) = \mathbf{A} \cos \theta + \mathbf{B} \sin \theta$ . Эта матрица является диагонализируемой (в силу указанного свойства гиперболичности [9]), поэтому собственные значения удовлетворяют условию  $\Lambda(\mathbf{U}, \theta) = \Lambda(\mathbf{T}\mathbf{U})$ .

### 3.3. Монотонизация решения

Использование базисных функций высокого порядка для аппроксимации решения на ячейках приводит к повышению точности метода. Однако, с другой стороны, их применение приводит к появлению нефизичных осцилляций численного решения, особенно в окрестности разрывов [12]. Для подавления таких осцилляций применяются специальные нелинейные ограничители — лимитеры [9].

Методические исследования, проведенные для одномерных задач [5], показывают высокую эффективность подхода, связанного с использованием технологии реконструкции решения на основе метода WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [13]. В многомерном случае при использовании компактных шаблонов, удобно применять модификацию алгоритма WENO\_S [3].

Простейшим способом выполнения процедуры лимитирования является покомпонентное применение функции-ограничителя к вектору неизвестных  $\mathbf{U}$ . Такой прием прост в программной реализации, однако является «уязвимым» в силу высокой связности и нелинейности решаемой системы уравнений. Применение лимитеров к инвариантам Римана (с использованием характеристического разложения матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \theta)$  квазилинейной формы системы уравнений), хотя и «утяжеляет» расчет, является более оправданным и заметно улучшает результат [14].

При использовании лимитеров порядок точности численного метода может снижаться до первого (в общем случае). Чаще всего это происходит при ошибочном применении лимитера в областях, где решение является гладким. Такое явление нивелирует эффект от введения полиномиальной аппроксимации решения, поэтому перед лимитированием необходимо провести поиск ячеек, производные решения на которых необходимо ограничить. Для выявления таких ячеек используются функции-индикаторы. В обсуждаемом прототипе программного комплекса используются индикаторы ВЖ (Barth — Jespersen, [15]) и Shu [6].

Кроме того, существуют лимитеры, основанные на локальном принципе максимума. Их применение вычислительно менее затратно за счет совмещения процедуры поиска проблемных ячеек с алгоритмом лимитирования, например, в рамках лимитера ВЖ [15]. Для улучшения качества решения возможно использование нескольких вариантов таких алгоритмов: можно рассматривать как ячейку с ее ближайшими соседями через ребра (стандартный шаблон), так и дополнительно соседние ячейки через вершины. Проведенные авторами методические исследования показали заметное повышение качества численного решения при использовании «расширенного шаблона» в процедуре поиска проблемных ячеек и лимитирования при незначительном росте вычислительной сложности алгоритма.

### 3.4. Контроль шага по времени

При оценке числа Куранта в потоке сжимаемой среды необходимо учитывать не только значение скорости среды, но и величину скорости звука. Сумма этих величин представляет собой максимальное значение скорости переноса  $V$ , которое используется при оценке величины следующего шага по времени. В прототипе программного комплекса реализован следующий алгоритм динамического подбора шага по времени, выполненный по аналогии с соответствующей процедурой программного пакета OpenFOAM [16].

Максимальное значение характеристического числа Куранта  $Co_{max}$  и максимально допустимая скорость роста шага по времени  $R_{max}^{\tau}$  задаются пользователем. Значение временного шага обновляется после выполнения всех стадий алгоритма Рунге — Кутты следующим образом:

- вычисляется фактическое характеристическое число Куранта  $Co_j$  на каждой ячейке  $I_j, j = \overline{1, n_{cells}}$ :

$$Co_j = \frac{\sum_e l_e \max_e V}{|I_j|},$$

где  $l_e$  — это длина соответствующего ребра  $e \in I_j$ ,  $|I_j|$  — площадь ячейки  $I_j$ ;

- вычисляется фактическая скорость роста шага  $R^{\tau}$  для следующего шага по времени:

$$R^{\tau} = \min \left( \frac{Co_{max}}{\varepsilon + \max_j Co_j}, R_{max}^{\tau} \right),$$

где  $\varepsilon = 10^{-6}$  — малое число, препятствующее появлению деления на ноль;

- вычисляется новое значение шага по времени  $\tau_{new}$ :

$$\tau_{new} = R^{\tau} \tau_{old},$$

которое может быть при необходимости дополнительно модифицировано для возможности вывода результатов расчетов через временные отрезки одинаковой величины.

## 4. Параллельная реализация вычислительного алгоритма

Описанный численный метод реализован в прототипе параллельного программного комплекса на языке C++ с использованием технологии MPI для систем с разделенной памятью. Идея распараллеливания описанного численного метода достаточно проста и основана на декомпозиции расчетной области, которая производится так, чтобы длина границы между подобластями была минимальна. На рисунке 1 приведен пример разбиения сетки на подобласти. Решение в каждой подобласти рассчитывается отдельным вычислительным модулем [18]. Использование явной численной схемы требует лишь передачи информации только с ячеек, прилегающих к границам подобластей; на каждом шаге расчета (и каждой стадии метода Рунге — Кутты) производится обмен значениями коэффициентов в разложении решения на «приграничных» слоях ячеек между подобластями и, соответственно, обрабатывающими их процессорами.

Расчеты проводились на кластере К60 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Опишем основные этапы работы прототипа параллельного программного комплекса.

**Подготовка к запуску.** Расчет производится на четырехугольных и треугольных неструктурированных сетках. Для их построения используется пакет SALOME с открытым исходным кодом. На подготовительном этапе производится разбиение сетки на подобласти по количеству используемых вычислительных модулей. Для равномерной загрузки ядер



Рис. 1. Пример разбиения расчетной области на подобласти

необходимо сбалансировать число ячеек в каждой подобласти и минимизировать количество смежных ячеек, данные в которых передаются между модулями. Для этого использован алгоритм ParMetis [17], устанавливающий соответствие между номером ячейки в сетке и номером подобласти.

**Инициализация данных.** До начала расчета производится «считывание» сетки. Нулевой процесс хранит информацию о всей сетке целиком, что облегчает процедуру выгрузки решения в файл (необходимо пересылать только выгружаемые значения решения). Другие процессы хранят в памяти информацию только о тех ячейках, которые необходимы для расчета на данном модуле. Кроме того, заранее вычисляются и сохраняются в памяти базисные функции для каждой ячейки, массивы соседей ячеек сетки, скалярные коэффициенты лимитера. Для обмена значениями решения между теньевыми слоями на границах подобластей каждым модулем дополнительно подготавливаются буферные массивы.

**Расчет.** Интегрирование по времени производится явным методом Рунге — Кутты второго порядка: каждый шаг по времени состоит из двух стадий вычисления решения. Величина очередного шага по времени для метода Рунге — Кутты в каждой подобласти определяется следующим условием

$$\max_i |\lambda_i| \frac{\tau}{h_{min}} \leq 1,$$

где  $h_{min}$  — длина наименьшего ребра ячейки в сетке,  $\lambda_i$  — максимальное по модулю собственное значение системы (1) на предыдущем шаге по времени. Из них при помощи средств библиотеки MPI выбирается минимальный шаг, при котором условие устойчивости численной схемы оказывается выполнено во всей расчетной области. Эффективность предложенного алгоритма обеспечивается относительно небольшим числом приграничных ячеек по сравнению с общим числом ячеек в каждой из подобластей.

## 5. Результаты тестовых расчетов

Созданный прототип параллельного программного комплекса протестирован на решении часто рассматриваемых модельных двумерных задач газовой динамики. Результаты валидации приведены в предыдущих работах авторов [8], в которых продемонстрировано хорошее согласие численных результатов с аналитическими. В данной работе приведены результаты нагрузочного тестирования при расчете модельных задач газовой динамики в областях сложной формы на неструктурированной сетке с количеством ячеек порядка  $10^6$ . В качестве тестовых примеров были выбраны задачи, решение которых содержит сложные ударно-волновые структуры — расчет двойного Маховского отражения в области со скошенным углом и цилиндрическая задача Сода о распаде разрыва в области сложной формы. Для обеих задач результаты получены RKDG-методом второго порядка точности по пространству и времени с численным потоком HLL, индикатором VJ и лимитером WENO\_S.

### 5.1. Двойное Маховское отражение

Задача двойного Маховского отражения ударной волны, набегающей на скошенный уступ, решается в двумерной области, пример разбиения которой на 128 подобластей показан на рис. 2(а). На рисунке 2(б) показаны результат расчета для числа Маха набегающего потока  $M = 10$  в момент времени  $T = 0.2$ . Левая граница является «входом», где скорость набегающего потока равна 8,25. На правой границе ставятся неотражающие граничные условия. На других границах ставятся условия непротекания, т.е. нормальная составляющая скорости равна нулю.

Расчет производился с шагом по времени  $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$ . Сетка содержит 1300 тыс. ячеек и разбивается на 128 подобластей, т.е. на каждое ядро приходится около 10 тыс. ячеек. При таком разбиении время работы программы составило порядка 20 минут. Отметим, что при выбранных настройках численной схемы удалось воспроизвести неустойчивость Кельвина — Гельмгольца.



**Рис. 2.** Моделирование двойного Маховского отражения: (а) – разбиение расчетной области на подобласти; (б) – распределение плотности в момент времени  $T = 0.2$

Следующим этапом было исследование ускорения времени расчета программы при сильном уменьшении количества ячеек, приходящихся на один процесс. Для этого была выбрана сетка, состоящая из 160 тысяч ячеек; ее разбивали на разное количество подобластей — от двух до 256 подобластей (при этом количество ячеек в одной подобласти не превышало одну тысячу). Засекалось время расчета одного шага по времени. На рисунке 3 видно, что ускорение остается практически линейным даже при сильном дроблении сетки.

### 5.2. Задача Сода в области сложной формы

Задача Сода является частным случаем задачи Римана о распаде разрыва, решение которой содержит три основных типа разрывов: ударную волну, волну разрежения и контактный разрыв. Рассмотрим задачу Сода с начальным возмущением в форме круга, радиус которого равен 0.2. Начальное условие ставится следующим образом:

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & r \leq 0.2, \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & r > 0.2. \end{cases}$$

Особенность теста, проведенного для данной работы, заключается в рассмотрении процесса распада разрыва на достаточно длительном временном промежутке в расчетной области сложной формы. Это приводит к значительному возрастанию количества «проблемных»

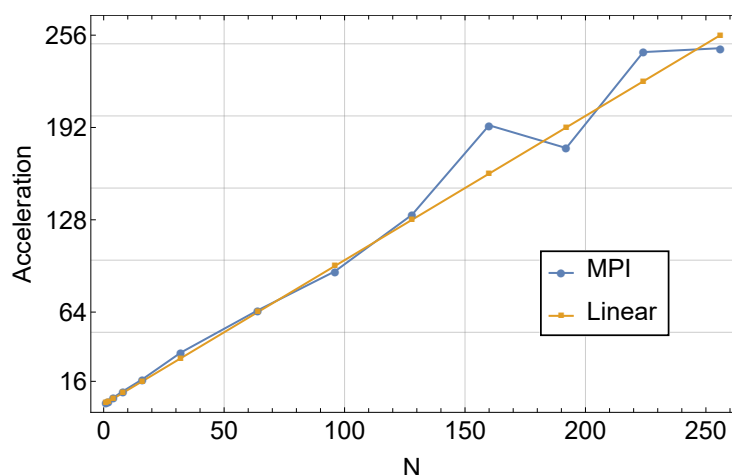


Рис. 3. График ускорения расчета в зависимости от количества вычислительных ядер

ячеек в силу многократного переотражения ударных волн, что естественным образом влияет на время расчета одного шага.

На рисунке 4 показаны результаты моделирования задачи Сода: распределение плотности (а) и скорости (б) в момент времени  $T = 1$ . Сохраняется высокая разрешающая способность схемы к моделированию сильных разрывов и сложных структур, возникающих после многократного переотражения волн, а также способность к моделированию газодинамических неустойчивостей.

Расчет проводился на сетке, состоящей из 1250 тыс. ячеек с разбиением на 128 подобластей. На этой же сетке исследовалось ускорение RKDG-метода. Из таблицы 1 видно, что алгоритм хорошо распараллеливается на большом количестве вычислительных узлов, даже когда количество «проблемных» ячеек велико, т.е. требуется реконструкция численного решения в достаточно большой части расчетной области.

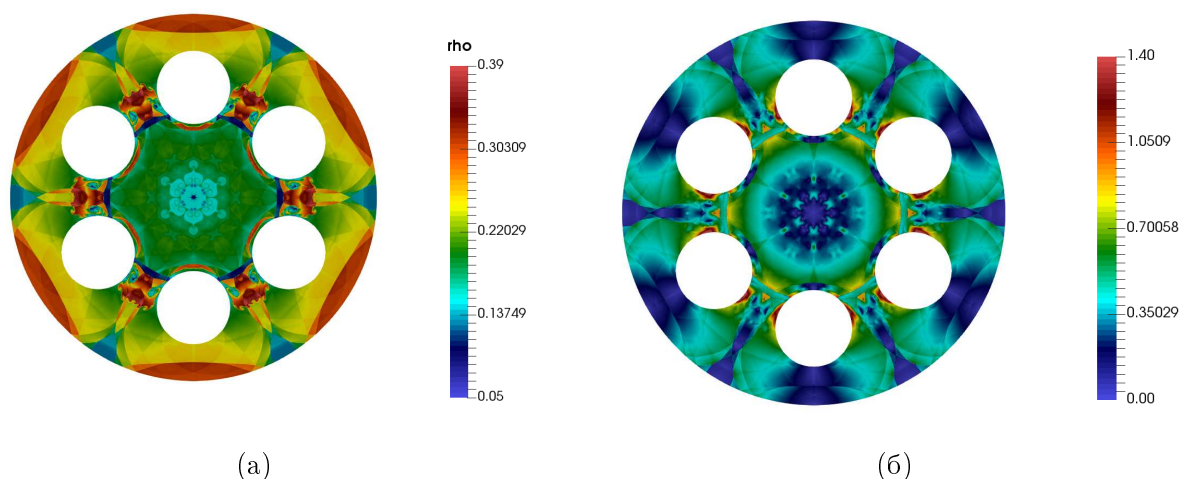


Рис. 4. Моделирование задачи Сода: (а) – распределение плотности в момент времени  $T = 1$ ; (б) – распределение скорости в момент времени  $T = 1$



**Таблица 1.** Динамика временного шага расчета при увеличении числа вычислительных ядер.

Н ядер	1	2	4	8	16	32	64	128
Время расчета, с	21.301	13.826	8.078	4.55	2.09	1.04	0.715	0.54

## 6. Заключение

Рассмотрен алгоритм для решения двумерных уравнений газовой динамики разрывным методом Галеркина, основывающийся на методах приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва. На тестовых задачах показан высокий уровень разрешения разрывов, монотонность получаемого численного решения и эффективное разрешение газодинамических неустойчивостей. Реализована и протестирована параллельная версия программы с использованием технологии параллельных вычислений для систем с распределенной памятью MPI. Представлен график ускорения расчетов, показывающий высокую эффективность и хорошую масштабируемость параллельного алгоритма.

## Литература

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151–268. DOI: 10.1007/978-3-662-03882-6\_2
2. Qiu J., Shu C.-W. Runge — Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. Vol. 26, No. 3. P. 907–929. DOI: 10.1137/S1064827503425298.
3. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics. 2013. Vol. 232. P. 397–415. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.08.028.
4. Shu C.-W., Qiu J. A Comparison of Troubled-Cell Indicators for Runge – Kutta Discontinuous Galerkin Methods Using Weighted Essentially Nonoscillatory Limiters // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 27, No. 3. P. 995–1013. DOI: 10.1137/04061372X
5. Галеева В.Д., Лукин В.В., Марчевский И.К., Фуфаев И.Н. Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 131. 32 с. DOI: 10.20948/prepr-2017-131.
6. Fu G., Shu C.-W. A New Troubled-Cell Indicator for Discontinuous Galerkin Methods for Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics. 2017. Vol. 347. P. 305–327. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.06.046
7. Giuliani A., Krivodonova L. Analysis of slope limiters on unstructured triangular meshes // Journal of Computational Physics. 2018. Vol. 374. P. 1–26. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.07.031
8. Korchagova V.N., Fufaev I.N., Lukin V.V., Sautkina S.M. Numerical moodelling of two-dimensional perfect gas flows using RKDG method on unstructured meshes // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2027. DOI: 10.1063/1.5065323

9. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer. 2009. 738 p. DOI:10.1007/978-3-540-49834-6
10. Cockburn B., Shu C.-W. TVB Runge — Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General framework // *Mathematics of Computation*. 1989. Vol. 52, No. 186. P. 411–435. DOI: 10.2307/2008474
11. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu, J.-X. Runge – Kutta Discontinuous Galerkin Method with a Simple and Compact Hermite WENO limiter on Unstructured Meshes // *Communications in Computational Physics*. 2017. Vol. 21(3). P. 623–649. DOI: 10.4208/cicp.221015.160816a
12. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306. URL: [www.mathnet.ru/links/1226ef2e4acc8479a49426b0c017bda8/sm4873.pdf](http://www.mathnet.ru/links/1226ef2e4acc8479a49426b0c017bda8/sm4873.pdf)
13. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes // *Journal of Computational Physics*. 1994. Vol. 115(1). P. 200–212. DOI: 10.1006/jcph.1994.1187
14. Krivodonova L., Xin J., Remacle J.F., Chevaugeon N., Flaherty J.E. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws // *Applied Numerical Mathematics*. 2004. Vol. 48. P. 323–338. DOI: 10.1016/j.apnum.2003.11.002
15. Barth T.J., Jespersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA. 1989. DOI: 10.2514/6.1989-366
16. Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // *Computers in Physics*. 1998. Vol. 12, No. 6. DOI: 10.1063/1.168744
17. Karypis G., Kumar V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1999. Vol. 20, No. 1. P. 359–392. DOI: 10.1137/S1064827595287997
18. Галанин М.П., Лукин В.В., Шаповалов К.Л. Параллельный алгоритм RKDG метода второго порядка для решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики // *Вестник УГАТУ*. 2014. С. 218–226.