

Программа-прототип для решения одномерных задач методом RKDG

Семинар лаборатории механики сплошных сред ИСП РАН

Лукин В.В., Марчевский И.К.,

Галеева В.Д., Фуфаев И.Н.

Москва — 2017

Решаемые задачи

Линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const}$$

Квазилинейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Система уравнений газовой динамики

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{I}}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}[(e + p) \mathbf{v}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(U)}{\partial x} = \mathbf{0},$$

ρ — плотность; \mathbf{v} — вектор скорости; p — давление; $e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2$ — полная энергия единицы объема.

Линейное и квазилинейное уравнение переноса

Схема «против потока»

$$F_{i+1/2}^{upwind} = \begin{cases} F(U_i), & \text{если } u > 0, \\ F(U_{i+1}), & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

- первый порядок
- монотонная

Схема с центральными разностями

$$F_{i+1/2}^{cendiff} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2}$$

- второй порядок
- немонотонная

Нелинейные схемы второго порядка

$$F_{i+1/2} = f_i F_{i+1/2}^{upwind} + (1 - f_i) F_{i+1/2}^{cendiff}$$

Схемы ван-Лира, minmod, superbee...

- второй порядок
- монотонная

Задача Римана

Задача Римана для одномерной гиперболической системы уравнений в неограниченной области:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0},$$

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \Omega_R \Lambda \Omega_L, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Начальные условия:

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 & \text{при } x < 0, \\ \mathbf{U}_2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

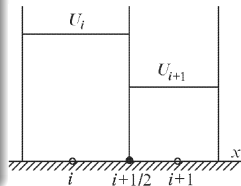
Численные потоки

Поток КИР (Куранта — Изаксона — Риса)

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{h} = 0,$$

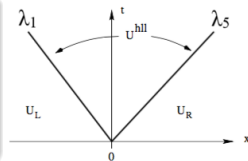
$$F_{m+1/2} = \frac{1}{2}(F_m^k + F_{m+1}^k) + \frac{1}{2}|A|_{m+1/2}^k (U_m^k - U_{m+1}^k),$$

$$|A| = \Omega_R |\Lambda| \Omega_L.$$



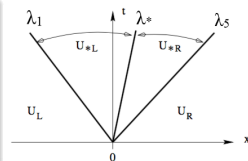
Поток HLL (Хартена — Лакса — ван-Лира)

$$F_{i+1/2}^{hll} = \begin{cases} F_L & \text{при } 0 \leq \lambda_1, \\ \frac{\lambda_5 F_L - \lambda_1 F_R + \lambda_1 \lambda_5 (U_R - U_L)}{\lambda_5 - \lambda_1}, & \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_5, \\ F_R & \text{при } 0 \geq \lambda_5. \end{cases}$$



Поток HLLC (HLL + Contact)

$$F_{i+1/2}^{hllc} = \begin{cases} F_L & \text{при } 0 \leq \lambda_1, \\ F_{*L} & \text{при } \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_*, \\ F_{*R} & \text{при } \lambda_* \leq 0 \leq \lambda_5, \\ F_R & \text{при } 0 \geq \lambda_5. \end{cases}$$



Выбор базисных функций

Приближенное решение

Приближенное решение U_h на каждой ячейке будем искать в виде разложения по некоторому базису:

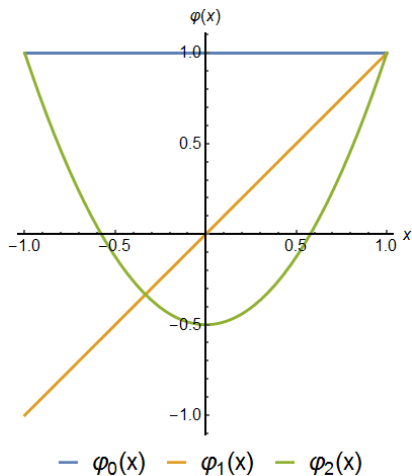
$$U_j^k(x) = \sum_{s=0}^m U_j^{(s),k} \varphi_j^{(s)}(x)$$

$\varphi_j^{(s)}(x)$ — полиномы
Лежандра

$$\varphi_j^{(s)}(-1) = (-1)^s,$$

$$\varphi_j^{(s)}(1) = 1,$$

$$(\varphi_j^{(s)}, \varphi_j^{(p)}) = 0, \quad s \neq p.$$



Граничные начальные условия

Граничные условия

Вводятся «фиктивные» ячейки с номерами 0 и $(n + 1)$.

- Условие свободного вытекания (выход потока)

$$U_0^k = U_1^k|_{left}, \quad U_{n+1}^k = U_n^k|_{right}.$$

Возможно появление «паразитных» отраженных волн.

- Условие отражения (твердая стенка).
- Условия периодичности: $U_0^k = U_1^k, \quad U_{n+1}^k = U_n^k$.

Начальные условия

$$\rho(x)|_{t=0}, \quad v(x)|_{t=0}, \quad p(x)|_{t=0}$$
$$e(x) = \frac{p(x)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(x)v(x)^2.$$

Монотонизация решения

Применение ограничителей (лимитеров)

Решение на каждой ячейке представляется в виде

$$U_j^k(x) = U_j^{(0),k} \varphi_j^{(0)}(x) + U_j^{(1),k} \varphi_j^{(1)}(x) + U_j^{(1),k} \varphi_j^{(2)}(x).$$

Для подавления нефизичных осцилляций решения были использованы ограничители:

$$U_j^k(x) = U_j^{(0),k} \varphi_j^{(0)}(x) + \Lambda \Pi_h \left(U_j^{(1),k} \varphi_j^{(1)}(x) + U_j^{(2),k} \varphi_j^{(2)}(x) \right).$$

Применение индикаторов

Применять ограничители следует лишь на тех ячейках, где нарушается монотонность решения и возникают нефизичные осцилляции. Для выявления таких ячеек были использованы специальные функции-индикаторы.

Интегрирование по времени

Реализованы следующие схемы интегрирования ОДУ по времени:

Схемы, не обладающие свойством TVD

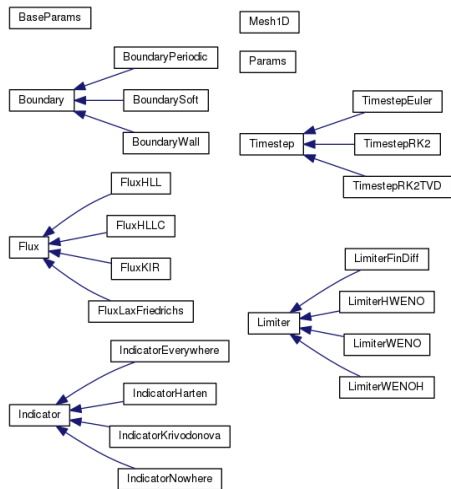
- Явный метод Эйлера
- Метод Эйлера с коррекцией
(метод Рунге — Кутты 2-го порядка)

Схемы, обладающие свойством TVD

- Метод Рунге — Кутты 2-го порядка
- Метод Рунге — Кутты 3-го порядка

Программная реализация

- Программа написана на языке C++ и построена на основе парадигмы объектно-ориентированного программирования.
- Модульное построение программы позволяет сделать ее легко расширяемой в смысле добавления новых численных потоков, индикаторов, ограничителей.
- Графическое отображение результатов расчетов, сохраняемых в текстовый файл, реализовано в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.



Структура классов

Общие классы

Mesh1D, Integrator, Params, BaseParams

Численные потоки (методы) Fluxes

GodunovType, KIR, LaxFriedrichs, HLL, HLLC

Вычисление скорости звука на разрыве: по полусумме; по Роу; по Эйфельду.

Схемы интегрирования по времени Limiters

Euler, RK2, RK2TVD, RK3TVD

Лимитеры Timesteps

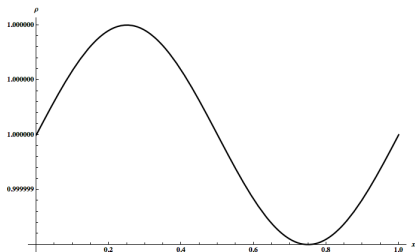
FinDiff, HWENO, WENO, WENO_S, HWENO_SC

Индикаторы Indicators

Everywhere, Nowhere, Krivodonova, Harten

Порядок аппроксимации RKDG-метода

Акустическая волна, кусочно-линейная аппроксимация



Параметры расчета:

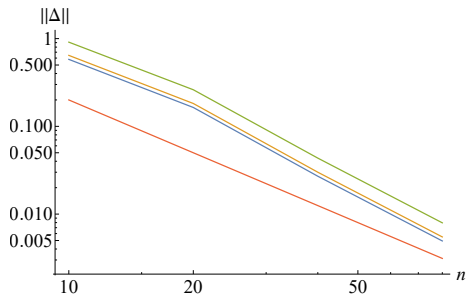
$$L = 1.0, T = 100.0, \frac{\tau}{h} = 0.1.$$

Начальные параметры газа:

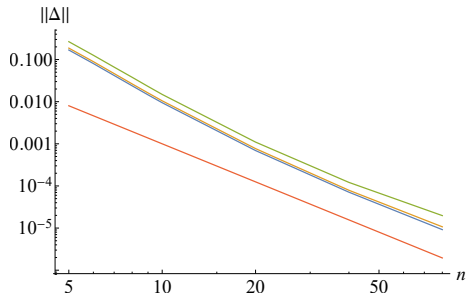
$$\rho = 1 + 10^{-6} \sin(2\pi x),$$
$$u = -1, \quad p = 1/\gamma.$$

Ошибка оценивается в нормах $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$ и $\|\cdot\|_C$

Зависимость ошибки от числа панелей



2 базисные функции

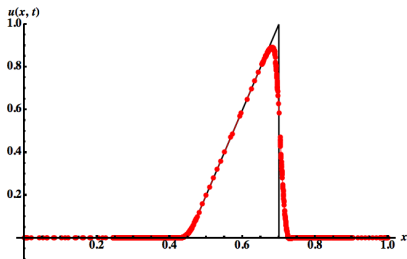


3 базисные функции

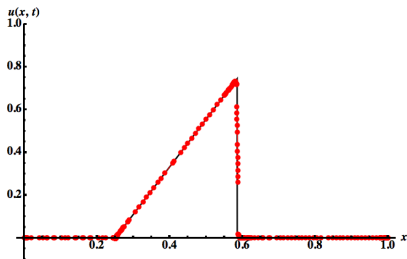
Численное решение уравнений переноса

Результаты приведены для линейного и квазилинейного уравнений переноса при $L = 1.0$, $T = 0.2$, $\frac{\tau}{h} = 0.01$, использован поток ван-Лира, начальное условие вида «левый треугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.25}{0.25}, & \text{при } x \in (0.25, 0.5) \\ 0, & \text{при } x \notin (0.25, 0.5) \end{cases}$$



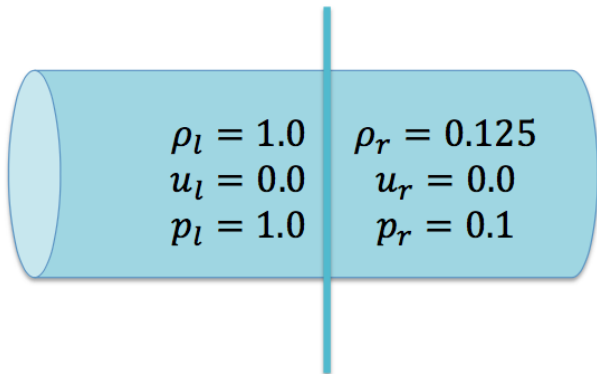
Линейное уравнение переноса



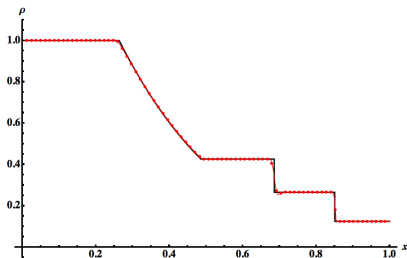
Квазилинейное уравнение переноса

Задача Сода

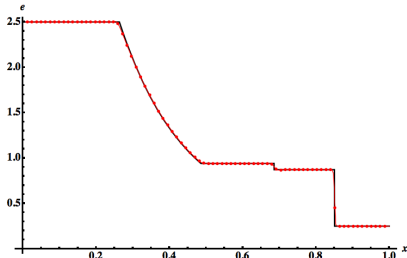
Результаты приведены для $L = 1.0$, $T = 0.2$, $\frac{\tau}{h} = 0.1$;
использовалась кусочно-линейная аппроксимация решения
на ячейках. Начальные параметры для левого и правого
состояния идеального газа следующие:



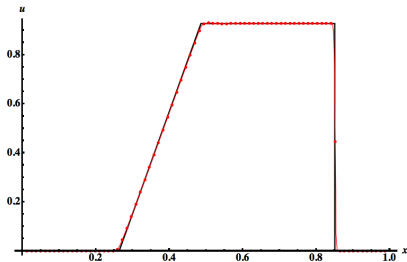
Задача Сода



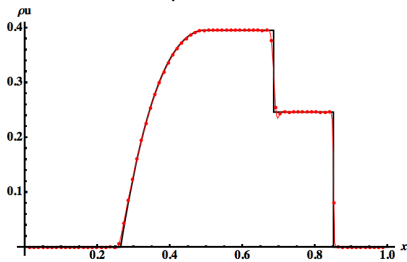
Плотность газа, поток HLLC



Полная энергия, поток HLLC



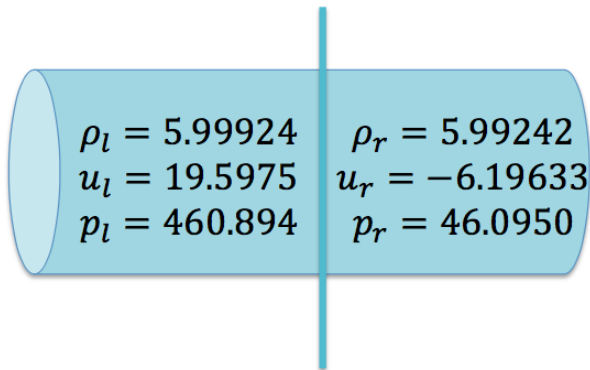
Скорость газа, поток HLL



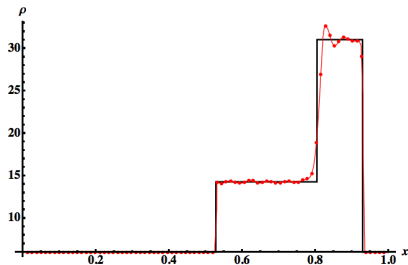
Плотность импульса газа, поток KIR

Задача двух ударных волн

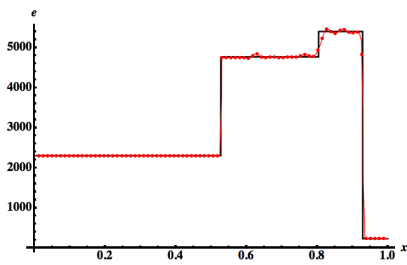
Результаты приведены для $L = 1.0$, $T = 0.035$, $\frac{\tau}{h} = 0.001$; использовалась кусочно-линейная аппроксимация решения на ячейках. Начальные параметры для левого и правого состояния идеального газа следующие:



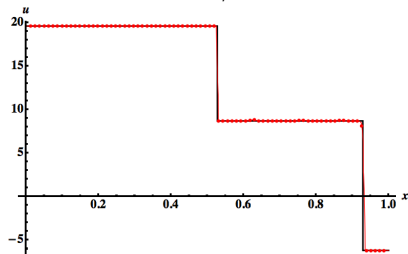
Задача двух ударных волн



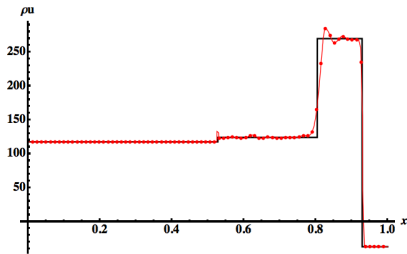
Плотность газа, поток HLLC



Полная энергия, поток HLLC



Скорость газа, поток HLLC



Плотность импульса газа, поток HLLC